Aniello Murano

# Semantica Operazionale del linguaggio imperativo IMP

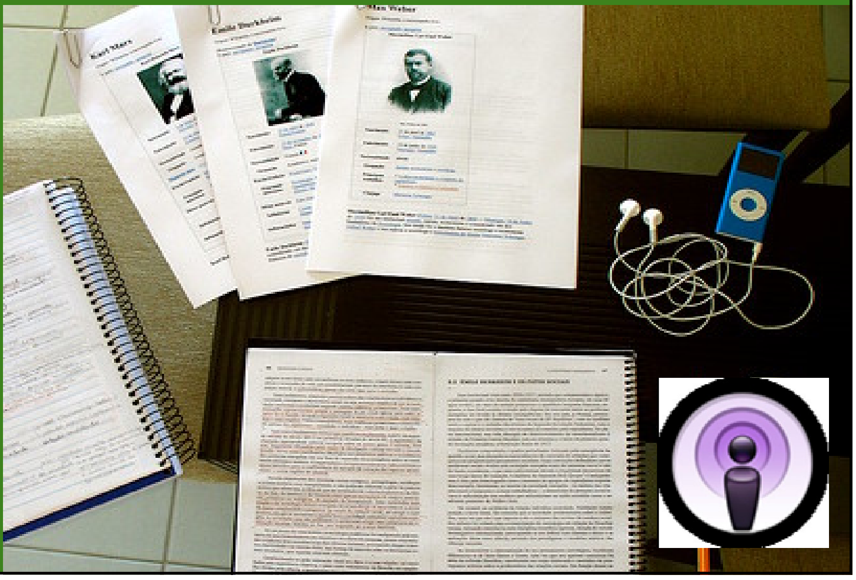
**Lezione n.**2
**Parole chiave:**
Sem. Operazionale

**Corso di Laurea:**
Informatica

**Codice:**

**Email Docente:**
murano@ na.infn.it

**A.A.** 2008-2009



## Introduzione

- Il linguaggio IMP è detto **imperativo** perché l'esecuzione di un programma comporta l'esecuzione esplicito di comandi che modificano lo stato
- IMP è **descritto da regole** che specificano come valutare le sue espressioni e come eseguire i suoi comandi.
- Tali regole forniscono una **semantica operazionale** di IMP

## Sintassi di IMP

| Var | | Set | | Definizione |
|---|---|---|---|---|
| m,n | 2 | N | := | Interi |
| t | 2 | T | := | {true, false} |
| X,Y | 2 | Loc | := | {$x_1$, $x_2$, ...... $x_n$, $y_1$, $y_2$,....$y_n$} |
| A | 2 | Aexp | := | n \| X \| $a_0$ + $a_1$\| $a_0$ − $a_1$\| $a_0$ £ $a_1$ |
| b | 2 | Bexp | := | true \| false \| $a_0$ = $a_1$ \| $a_0$ · $a_1$ \| : b \| $b_o$ Æ$b_1$ \| $b_0$ Æ$b_1$ |
| c | 2 | Com | := | Skip \| X:=a \| $c_o$;$c_1$ \| if b then $c_0$ else $c_1$ \| while b do c |

La forma degli elementi di **Aexp**, **Bexp** e **Com** viene specificata tramite regole di formazione, espresse in una variante della BNF(Bakus-Naur Form)

## Grammatica BNF (Bakus-Naur Form)

a ::= n | X | $a_0$ + $a_1$| $a_0$ − $a_1$| $a_0$ £ $a_1$

- La BNF altro non e' che un insieme di regole per costruire un linguaggio dove:
  - "::=" significa "puo' essere"
  - "|" significa "oppure"
  - "a" e' una metavariabile
- Un linguiaggio e' chiaramente un insieme di espressioni
  - Aexp e' l'insieme delle espressioni aritmetiche
- Chiaramente la BNF e' una semplificazione...

## Regole di costruzione

- Short hand for rule

  *if* $a_0 \in$ Aexp *and* $a_1 \in$ Aexp *then* $a_0 + a_1 \in$ Aexp
- Describe as *inference rule*

$$\frac{a_0 \in \text{Aexp} \quad a_1 \in \text{Aexp}}{a_0 + a_1 \in \text{Aexp}} \qquad \frac{\text{premise}_1 \quad \dots\ \text{premise}_n}{\text{conclusion}}$$

– sometimes read better from the bottom up

## Due livelli

- *Rule Template*

$$\frac{a_0 \in \text{Aexp} \quad a_1 \in \text{Aexp}}{a_0 + a_1 \in \text{Aexp}}$$

- *Rule Instance*

$$\frac{y \in \text{Aexp} \quad 5 \in \text{Aexp}}{y + 5 \in \text{Aexp}}$$

- n, $a_0$, $a_1$, X are *metavariables*
  - the are used to define the language
  - not part of the language being defined

## Regole per generare espressioni

◆ Axioms

$n \in \text{Aexp}$ $\qquad X \in \text{Aexp}$

◆ Inference Rules

$$\frac{a_0 \in \text{Aexp} \quad a_1 \in \text{Aexp}}{a_0 + a_1 \in \text{Aexp}} \qquad \frac{a_0 \in \text{Aexp} \quad a_1 \in \text{Aexp}}{a_0 - a_1 \in \text{Aexp}} \qquad \frac{a_0 \in \text{Aexp} \quad a_1 \in \text{Aexp}}{a_0 \times a_1 \in \text{Aexp}}$$

$$\boxed{a ::= n \mid X \mid a_0 + a_1 \mid a_0 - a_1 \mid a_0 \times a_1}$$

## Tutto questo è sufficiente?

◆ Axioms + inference rules *generate* set Aexp
- smallest set closed under application of rules

◆ Set is infinite
- Is it well-defined, not victim to some paradox?
  - "Set of all sets that contain themselves"
- Reasonable assumption for now
  - More details next class

◆ Same works for Booleans and commands...

## Albero di derivazione

- Show how an expression is derived (a form of proof)

$$\dfrac{\dfrac{x \in \mathrm{Aexp} \qquad \dfrac{y \in \mathrm{Aexp} \quad 3 \in \mathrm{Aexp}}{3 * y \in \mathrm{Aexp}}}{x \le (3 * y) \in \mathrm{Bexp}} \qquad \dfrac{\dfrac{x \in \mathrm{Aexp} \quad y \in \mathrm{Aexp}}{x \times y \in \mathrm{Aexp}}}{x := x \times y \in \mathrm{Com}}}{\mathbf{while}\ x \le (3 + y)\ \mathbf{do}\ x := x \times y \in \mathrm{Com}}$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | ∈ | Aexp | ::= | n \| X \| $a_0 + a_1$ \| $a_0 - a_1$ \| $a_0 \times a_1$ |
| b | ∈ | Bexp | ::= | **true** \| **false** \| $a_0 = a_1$ \| $a_0 \le a_1$ \| $\neg b_0$ \| $b_0 \wedge b_1$ \| $b_0 \vee b_1$ |
| c | ∈ | Com | ::= | **skip** \| X := a \| $c_0; c_1$ \| **if** b **then** $c_0$ **else** $c_1$ \| **while** b **do** c |

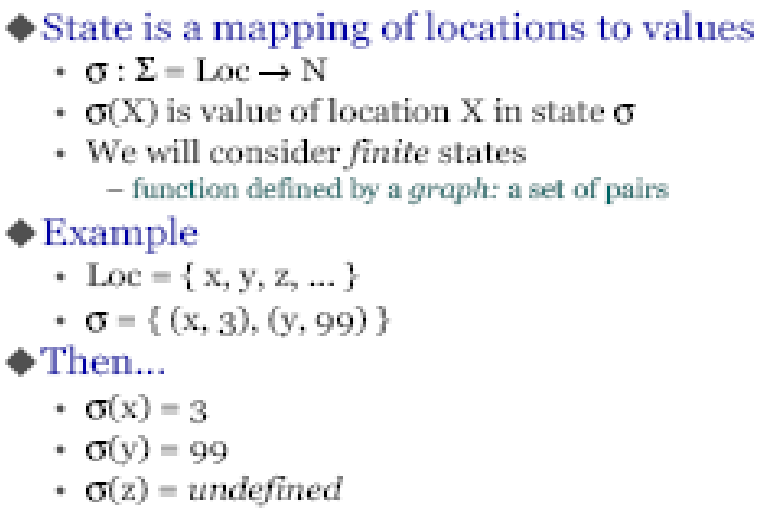
## Semantica operazionale

- How do we define the behavior of a program?

```
while x ≠ y do
   if x < y then
     y := y – x
   else
     x := x – y
```

- Informally
  - If we know the value of all the variables (locations) we can evaluate expressions (Aexp and Bexp)
  - Commands cause changes to the variables (:=) or affect the flow of control
- Let's formalize this
  - First we need a way to represent values of locations

## Stati



- State is a mapping of locations to values
  - $\sigma : \Sigma = \text{Loc} \rightarrow \text{N}$
  - $\sigma(X)$ is value of location X in state $\sigma$
  - We will consider *finite* states
    - function defined by a *graph:* a set of pairs
- Example
  - Loc = { x, y, z, ... }
  - $\sigma$ = { (x, 3), (y, 99) }
- Then...
  - $\sigma(x) = 3$
  - $\sigma(y) = 99$
  - $\sigma(z) =$ *undefined*

## Valutazione delle espressioni

- Aexp si valuta in interi, rispetto ad un dato stato
- Con **<a, σ>** denotiamo una espressione aritmetica **a** che deve essere valutata nello stato σ
  - La coppia **<a, σ>** è una ***configurazione***
- Per dire che l'espressione a valutata nello stato σ si riduce a n usiamo

  **<a, σ> → n**

  - Il simbolo "→ " è una ***relazione di transizione***
- Specifica il comportamento di una ***macchina astratta***:
  - Quando forniamo in input alla macchina una coppia espressione (**a**) stato (σ), la macchina da in output il valore n
  - Questo può essere pensato come una ***transizione*** da una configurazione a un valore finale.

## Terminologia

- The symbol $\rightsquigarrow$ is a *relation*

  $\rightsquigarrow \subseteq \text{Aexp} \times \Sigma \times \text{N}$

  - Remember "x R y" means $(x, y) \in R$
  - choice of symbol $\rightsquigarrow$ is arbitrary
- Relationship between syntax and semantics
  - Aexp is *syntactic domain*, N is *semantic domain*
- Next: specific cases that *define* this relation
  - A case of each rule in that constructs Aexp

$$\boxed{a ::= n \mid X \mid a_0 + a_1 \mid a_0 - a_1 \mid a_0 \times a_1}$$

## Semantica operazionale di Aexp (1)

- Numbers

  $\langle n, \sigma \rangle \rightsquigarrow n$
- Examples

  $\langle 1, \varnothing \rangle \rightsquigarrow 1$

  $\langle 99, \sigma \rangle \rightsquigarrow 99$ where $\sigma = \{ (x, 3), (y, 99) \}$

  $\langle 99, \sigma \rangle \rightsquigarrow 99$ for *all* $\sigma$

  $\rightsquigarrow$ contains a triples of this form for every store $\sigma$ in $\Sigma$
- Remember: $\rightsquigarrow$ is just a set of triples:
  - $\langle 1, \varnothing, 1 \rangle \in \rightsquigarrow$

## Semantica operazionale di Aexp (2)

- **Locations**
  $\langle X, \sigma\rangle \rightsquigarrow \sigma(X)$
- **Examples**
  $\langle x, \{ (x, 3) \} \rangle \rightsquigarrow 3$
  $\langle y, \{ (x, 3), (y, 99) \} \rangle \rightsquigarrow 99$
  $\langle z, \{ \ldots, (z, n), \ldots \} \rangle \rightsquigarrow n$
- **What about**
  $\langle x, \varnothing\rangle \rightsquigarrow ???$
  $\rightsquigarrow$ does not contain any triples of the form $\langle X, \varnothing, ??? \rangle$
  Only valid programs are defined by transitions to integers

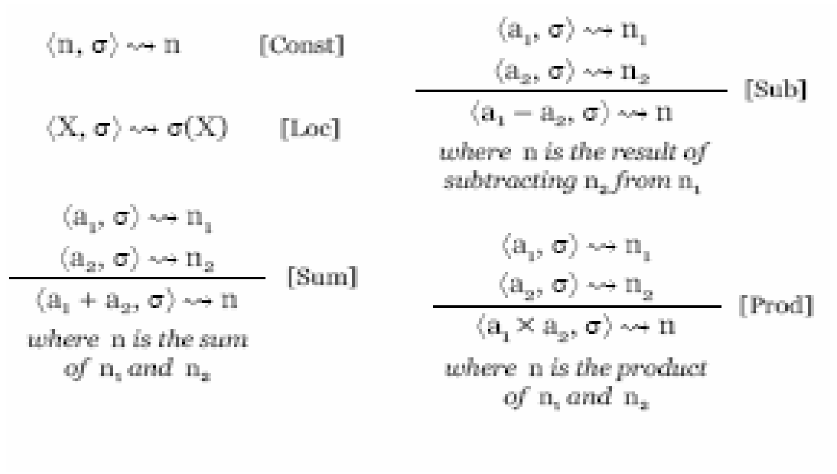
## Semantica operazionale di Aexp (3)

- **Addition**

$$\frac{\langle a_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow n_1 \qquad \langle a_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow n_2}{\langle a_1 + a_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow n} \qquad \textit{where } n \textit{ is the sum of } n_1 \textit{ and } n_2$$

- **Example**
  $\langle 99{+}x , \{ (x, 3) \} \rangle \rightsquigarrow 102$
- **Because**
  $\langle 99 , \{ (x, 3) \} \rangle \rightsquigarrow 99$
  $\langle x , \{ (x, 3) \} \rangle \rightsquigarrow 3$

## Semantica operazionale di Aexp (4)



$$\langle n, \sigma \rangle \rightsquigarrow n \quad \text{[Const]}$$

$$\langle X, \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma(X) \quad \text{[Loc]}$$

$$\frac{\langle a_1, \sigma \rangle \rightsquigarrow n_1 \qquad \langle a_2, \sigma \rangle \rightsquigarrow n_2}{\langle a_1 + a_2, \sigma \rangle \rightsquigarrow n} \quad \text{[Sum]}$$

*where* n *is the sum of* $n_1$ *and* $n_2$

$$\frac{\langle a_1, \sigma \rangle \rightsquigarrow n_1 \qquad \langle a_2, \sigma \rangle \rightsquigarrow n_2}{\langle a_1 - a_2, \sigma \rangle \rightsquigarrow n} \quad \text{[Sub]}$$

*where* n *is the result of subtracting* $n_2$ *from* $n_1$

$$\frac{\langle a_1, \sigma \rangle \rightsquigarrow n_1 \qquad \langle a_2, \sigma \rangle \rightsquigarrow n_2}{\langle a_1 \times a_2, \sigma \rangle \rightsquigarrow n} \quad \text{[Prod]}$$

*where* n *is the product of* $n_1$ *and* $n_2$

## Interpretazione delle regole

- Ogni regola di valutazione ha una premessa (scritta sopra la linea) e una conclusione (scritta sotto la linea)
- Siccome le regole specificano il significato delle espressioni in modo operazionale, si dice che esse definiscono una ***semantica operazionale*** di tali espressioni
- Alcune regole non hanno premesse. Queste regole, vengono anche chiamate ***assiomi*** come la regola seguente

$$\frac{}{<n, \sigma > \rightarrow n}$$

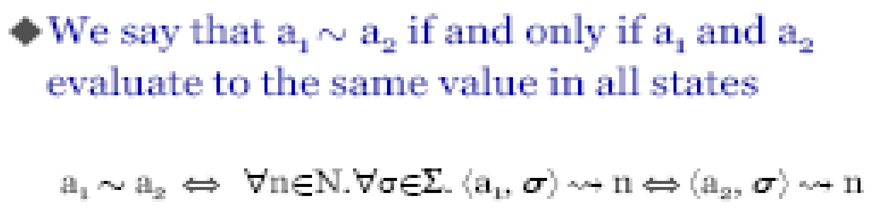
## Albero di derivazione

- Sia a ≡ (Init + 5 ) + (7 + 9) nello stato $\sigma_0$
- Init una locazione tale che $\sigma_0(\text{init})=0$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{<\text{Init}, \sigma_0> \rightarrow 0} \quad \dfrac{}{<5,\sigma_0> \rightarrow 5}}{<\text{Init} + 5,\sigma_0> \rightarrow 5} \qquad \dfrac{\dfrac{}{<7,\sigma_0> \rightarrow 7} \quad \dfrac{}{<9,\sigma_0> \rightarrow 9}}{<7 + 9,\sigma_0> \rightarrow 16}}{<(\text{Init} + 5) + (7 + 9),\sigma_0> \rightarrow 21}$$

- Tale struttura viene detta ***albero di derivazione***
- La conclusione della derivazione si chiama **derivata**
- Si noti come le regole forniscono anche un ***algoritmo*** per la valutazione di espressioni aritmetiche basato sulla ricerca di un albero di derivazione.

## Equivalenza in Aexp



- We say that $a_1 \sim a_2$ if and only if $a_1$ and $a_2$ evaluate to the same value in all states

$$a_1 \sim a_2 \Leftrightarrow \forall n\in N.\forall\sigma\in\Sigma.\ \langle a_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow n \Leftrightarrow \langle a_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow n$$

## Intermissione

- Summary
  - We have defined the valuate of arithmetic expressions
  - Defining a *transition relation* that relates abstract syntax (in context) to values
- Next: Boolean expressions

$$\boxed{\begin{array}{c} b ::= \mathbf{true} \mid \mathbf{false} \mid a_0 = a_1 \mid a_0 \leq a_1 \mid \\ \neg b \mid b_0 \wedge b_1 \mid b_0 \vee b_1 \end{array}}$$

## Semantica operazionale di Bexp(1)

- True and false

  $\langle \mathbf{true}, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{true}$

  $\langle \mathbf{false}, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{false}$
- Note
  - The **true** on the left is syntax, while true on the right is the element of the set of truth values T

## Semantica operazionale di Bexp(2)

◆ Comparisons

$$\frac{\langle a_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow n_1 \qquad \langle a_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow n_2}{\langle a_1 = a_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow t}$$

*where t is* true *if* $n_1$ *is equal to* $n_2$ *and* false *otherwise*

$$\langle a_1 \leq a_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow t$$

*where t is* true *if* $n_1$ *is less than or equal to* $n_2$ *and* false *otherwise*

– Shorthand: allow two conclusions for a set of premises

## Semantica operazionale di Bexp(3)

◆ Negation

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \rightsquigarrow \text{true}}{\langle \neg b\,, \sigma\rangle \rightsquigarrow \text{false}} \qquad \frac{\langle b, \sigma\rangle \rightsquigarrow \text{false}}{\langle \neg b\,, \sigma\rangle \rightsquigarrow \text{true}}$$

## Semantica operazionale di Bexp(4)

- And (Or is similar...)

$$\frac{\langle b_0, \sigma\rangle \rightsquigarrow \text{false}}{\langle b_0 \wedge b_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow \text{false}} \qquad \frac{\langle b_0, \sigma\rangle \rightsquigarrow \text{true} \quad \langle b_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow \text{true}}{\langle b_0 \wedge b_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow \text{true}}$$

$$\frac{\langle b_0, \sigma\rangle \rightsquigarrow \text{true} \quad \langle b_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow \text{false}}{\langle b_0 \wedge b_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow \text{false}}$$

- Note
  - There are only three cases. Why?
  - Any unconstrained variable can take any value
    - Example is $b_1$ in first inference rule

## Intermissione

- Summary
  - We have defined the valuate of arithmetic and Boolean expressions
  - Defining *transition relations* that relate abstract syntax and stores to values
- There are three different relations

$$\rightsquigarrow_{Aexp} \subseteq \text{Aexp} \times \Sigma \times \text{N}$$
$$\rightsquigarrow_{Bexp} \subseteq \text{Bexp} \times \Sigma \times \text{T}$$
$$\rightsquigarrow_{Com} \subseteq \text{Com} \times \Sigma \times \Sigma$$

- But we write them without subscripts, as $\rightsquigarrow$
  - Distinguish them by context

## Comandi

- Valutazione: Il ruolo dei programmi (e quindi dei comandi) è quello di essere eseguiti per **cambiare lo stato.**
- Quando si esegue un programma IMP, sia assume che lo stato (iniziale $\sigma_0$) associ valore 0 ad ogni locazione ("variabile"). **In pratica $\sigma_0$(X)=0.** Successivamente l'esecuzione può terminare in uno **stato finale** oppure **divergere**
- <c, σ> denota una ***configurazione di comando*** e denota la possibilità di eseguire il comando c a partire dallo stato σ
- La valutazione di un comando è formalmente definita da una funzione da un comando e uno stato ad un nuovo stato.

<c, σ> !   σ′

$$\begin{aligned} c ::= &\ \mathbf{skip} \mid X := a \mid c_0; c_1 \mid \\ &\ \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1 \mid \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c \end{aligned}$$

## Semantica Operazionale di Com (1)

- Skip

  $\langle \mathbf{skip}, \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma$

- Assignment

$$\frac{\langle a, \sigma \rangle \rightsquigarrow n}{\langle X := a, \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma'}$$ where $\sigma'$ is $\sigma$ updated to have n in location X

– Need a notation for updating state

Per esempio, < X:=5, σ > → σ′, indica che lo stato σ′ si ottiene dallo stato σ, aggiornandolo in modo che la locazione X contenga il valore 5

## Semantica Operazonale di Com (2)

- $\sigma'$ is $\sigma$ updated to have n in location X
  - $\sigma' = \sigma[n/X]$
- Change a value of a function for one input

$$\sigma[m/X](Y) = \begin{cases} m & \textit{if } Y = X \\ \sigma(Y) & \textit{otherwise} \end{cases}$$

- Final rule for assignment:

$$\frac{\langle a, \sigma\rangle \rightsquigarrow n}{\langle X := a, \sigma\rangle \rightsquigarrow \sigma[n/X]}$$

## Osservazione

- Does the assignment rule say anything useful?

$$\frac{\langle a, \sigma\rangle \rightsquigarrow n}{\langle X := a, \sigma\rangle \rightsquigarrow \sigma[n/X]}$$

- It tells us that
  - *a* is evaluated in the store before the assignment takes place
  - No side effects: the only thing changed in the store is the value of X after a is evaluated
  - oh, and this language does not allow Booleans to be stored in variables

Con questa notazione si può scrivere
$<X:=5,\sigma> = \sigma[5/X]$

## Semantica Operazonale di Com (3)

- Sequence

$$\frac{\langle c_0, \sigma\rangle \rightsquigarrow \sigma' \qquad \langle c_1, \sigma'\rangle \rightsquigarrow \sigma''}{\langle c_0; c_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow \sigma''}$$

- Order of evaluation is defined by the use of the store:

$$\begin{tikzcd}\sigma \arrow[r] & \boxed{C_0} \arrow[r] & \sigma' \arrow[r] & \boxed{C_1} \arrow[r] & \sigma''\end{tikzcd}$$

## Semantica Operazonale di Com (4)

- Conditionals

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \rightsquigarrow \text{true} \qquad \langle c_0, \sigma\rangle \rightsquigarrow \sigma'}{\langle \textbf{if}\ b\ \textbf{then}\ c_0\ \textbf{else}\ c_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow \sigma'}$$

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \rightsquigarrow \text{false} \qquad \langle c_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow \sigma'}{\langle \textbf{if}\ b\ \textbf{then}\ c_0\ \textbf{else}\ c_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow \sigma'}$$

- Outcome of Boolean determines which branch is executed

## Semantica Operazonale di Com (5)

- While loop

$$\frac{\langle \mathrm{b}, \sigma\rangle \rightsquigarrow \text{false}}{\langle \textbf{while}\ \mathrm{b}\ \textbf{do}\ \mathrm{c}, \sigma\rangle \rightsquigarrow \sigma}$$

$$\frac{\langle \mathrm{b}, \sigma\rangle \rightsquigarrow \text{true} \qquad \langle \mathrm{c}, \sigma\rangle \rightsquigarrow \sigma' \qquad \langle \textbf{while}\ \mathrm{b}\ \textbf{do}\ \mathrm{c}, \sigma'\rangle \rightsquigarrow \sigma''}{\langle \textbf{while}\ \mathrm{b}\ \textbf{do}\ \mathrm{c}, \sigma\rangle \rightsquigarrow \sigma''}$$

- Defined in *terms of itself*
  - *Need to ensure that this makes sense*

## Equivalenza in Com (1)

- We say that $c_1 \sim c_2$ if and only if $c_1$ and $c_2$ evaluate to the same state when started in the same state

$$c_1 \sim c_2 \iff \forall \sigma, \sigma' \in \Sigma.\ \langle c_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow \sigma' \iff \langle c_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow \sigma'$$

## Esercizio

- Show w $\sim$ w′ where
  - w $\equiv$ **while** b **do** c
  - w′ $\equiv$ **if** b **then** c; w **else skip**
    - Note: $\equiv$ is syntactic equivalence
- That is,

  $w \sim w' \Leftrightarrow \forall \sigma, \sigma' \in \Sigma.\ \langle w, \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma' \Leftrightarrow \langle w', \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma'$
- Intuition of proof:
  - Given a derivation of $\langle w, \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma'$ we can construct a derivation of $\langle w', \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma'$ (and vice-versa)